GEOMETRIA DIFERENCIAL - FICHA 8

JOÃO PEDRO MARTINS DOS SANTOS

1.

Suponha-se que existe uma aplicação diferenciável $\Phi : M \to \partial M$ tal que $\Phi_{|\partial M} = \mathrm{id}$. Seja $d = \dim M$. Seja (φ, U) um sistema de coordenadas positivo em ∂M. Seja $\rho : \partial M \to \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável não negativa e com suporte compacto, não-vazio e contido em U.
Então $\omega = \rho\varphi^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{d-1})$ é uma forma diferencial tal que $\displaystyle\int_{\partial M} \omega = \int_{\varphi(U)} \rho \circ \varphi^{-1} > 0$. Como $\Phi_{|\partial M} = \mathrm{id}$, então, pelo Teorema de Stokes, $\displaystyle\int_M d(\Phi^*\omega) = \int_{\partial M} \omega > 0$. Por outro lado, $d\omega = 0$, logo $d(\Phi^*\omega) = \Phi^*(d\omega) = 0$, logo $\displaystyle\int_{\partial M} \omega = \int_M d(\Phi^*\omega) = 0$, contradição.
Assim, não existe nenhuma aplicação diferenciável $\Phi : M \to \partial M$ tal que $\Phi_{|\partial M} = \mathrm{id}$.

2.

Seja $\Psi : B \to B$ uma aplicação diferenciável. Suponha-se que Ψ não tem pontos fixos. Seja $p \in B$. Seja r_p a semi-recta com origem em $\Psi(p)$ e que passa por p. Então $r_p \setminus \{\Psi(p)\}$ intersecta a esfera ∂B num único ponto $\Phi(p)$, e se $p \in \partial B$, então $\Phi(p) = p$. A aplicação $\Phi : B \to \partial B$ assim construída é diferenciável e é tal que $\Phi_{|\partial B} = \mathrm{id}$. Mas como B é uma variedade compacta e orientável com bordo $\partial B \neq \varnothing$, então, de acordo com o resultado de 1, não pode existir tal aplicação Φ.
Conclui-se que Ψ tem pelo menos um ponto fixo.